b)

* $z' = 1+\cos\theta+i\sin\theta = e^{i0}+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}.\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}.2\cos(\frac{\theta}{2})$

puisque $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ d'où

$$\boxed{z' = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

(Pour $\theta = -\pi$: $z' = 0$)

* $\forall\ \theta \in]-\pi,\pi[$:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{-\overline{z'}}{z'} = \frac{-2\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = -e^{-i\theta} = e^{i(\pi-\theta)}$$

c)

- $\frac{z''}{z'} = e^{i(\pi-\theta)} \Leftrightarrow \left|\frac{z''}{z'}\right| = \left|e^{i(\pi-\theta)}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|z''|}{|z'|} = \frac{OM''}{OM'} = 1 \Leftrightarrow$ OM" = OM' ce qui prouve que le triangle OM'M" est isocèle en O

- le triangle OM'M" est équilatéral

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM''},\overrightarrow{OM'}) \equiv \pm\frac{\pi}{3}(2\pi)$

$\Leftrightarrow Arg\frac{z''}{z'} \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi-\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\pi-\theta = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $\theta = \frac{4\pi}{3}+2k\pi$, $\theta \in [-\pi,\pi[$

Conclusion : $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{2\pi}{3}}$

Exercice n° 19 $\theta \in]0;\pi[$

(E) : $z^3+4z^2+\left(5-e^{2i\theta}\right)z-4i\sin\theta.e^{i\theta} = 0$

● a) On sait que : $2i\sin\theta = e^{i\theta}-e^{-i\theta}$

Donc : $1+2i\sin\theta e^{i\theta} = 1+(e^{i\theta}-e^{-i\theta})e^{i\theta}$

$= 1+e^{2i\theta}-\underbrace{e^{-i\theta}e^{i\theta}}_{=1}$

$\Longrightarrow 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$

$\Longrightarrow e^{i\theta}$ est une racine carrée de $1+2i\sin\theta e^{i\theta}$

b)

$*(-2)^3+4(-2)^2+(5-e^{2i\theta})(-2)-4i\sin\theta e^{i\theta}$

$= -8+16-10+2e^{2i\theta}-4i\sin\theta\, e^{i\theta}$

$= -2+2e^{2i\theta}-2(2i\sin\theta)e^{i\theta} = A$

Or d'après 1) a) : $2i\sin\theta e^{i\theta} = e^{2i\theta}-1$

Donc : $A = -2+2e^{2i\theta}-2(e^{2i\theta}-1)$

$= -2+2e^{2i\theta}-2e^{2i\theta}+2 = 0$

D'où (– 2) est une solution de (E)

* résolution de l'équation (E) :

(E) est équivalente à l'équation $(z+2)\left[z^2+az+b\right]=0$

$\Leftrightarrow z^3+(a+2)z^2+(b+2a)z+2b = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = 4 \\ b+2a = 5-e^{2i\theta} \\ 2b = -4i\sin\theta e^{i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = -2i\sin\theta e^{i\theta} \end{matrix}$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z+2)(z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta}) = 0$

$\Leftrightarrow$

$(z+2) = 0$ Où $(z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta}) = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+2z-2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

$\Delta' = 1+2i\sin\theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2 \Longrightarrow \delta = e^{i\theta}$

D'ou $z_1 = -1+e^{i\theta}$, $z_2 = -1-e^{i\theta}$

$\Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \{-2,-1+e^{i\theta},-1-e^{i\theta}\}$

● a)

$* z_1 = -1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\boxed{z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}}$$

$$* \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+e^{i\theta}}{-1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})}{-e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -i\,tg\frac{\theta}{2}$, or $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$

Donc $tg\frac{\theta}{2} > 0$ et par suite : $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = tg\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

b) On a $\frac{z_1+z_2}{2} = -1 = z_I$

Conclusion $\forall\ \theta \in]0,\pi[$, M_1 et M_2 sont symétriques par rapport au point I avec $z_I = -1$

Qarray.tn - Aqra Bech - Qarray.tn